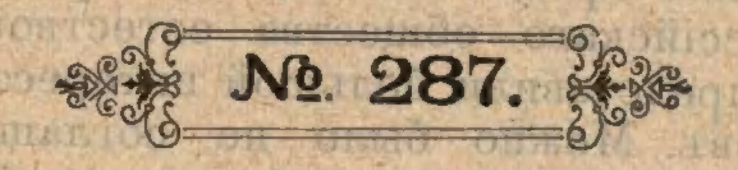
XXIV Сем. № 11.

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.



№ 287.

† Павелъ Тимофеевичъ Пасальскій.

И безъ того небольшая семья русскихъ физико-географовъ понесла замѣтную утрату: 12 ноября с. г. скоропостижно скончался молодой ученый приватъ-доцентъ Новороссійскаго Университета *Павель Тимофеевичъ Пасальскій.* Покойный родился въ 1871 году и по окончаніи Кишиневской гимназіи поступилъ въ 1890 году на математическое отдѣленіе физико-математическаго факультета Новороссійскаго Университета. Здѣсь онъ обратилъ на себя вниманіе своими выдающимися способностями и трудолюбіемъ и за сочиненіе: „Термодинамическія условія равновѣсія соприкасающихся массъ, разнородныхъ по своему физическому составу", получилъ золотую медаль. По окончаніи курса въ Университетѣ онъ занялъ мѣсто штатнаго наблюдателя магнитно-метеорологической Обсерваторіи на Маломъ Фонтанѣ тотчасъ же по ея основаніи. Первые годы онъ несъ на себѣ общія обязанности, а затѣмъ, начиная съ 1896 г., послѣ совмѣстной съ проф. Э. Е. Лейстомъ установки магнитныхъ приборовъ, принялъ въ свое вѣдѣніе магнитное отдѣленіе Обсерваторіи и на этомъ поприщѣ развилъ въ высокой степени плодотворную дѣятельность. Кромѣ цѣлаго ряда мелкихъ работъ, представляющихъ тѣмъ не менѣе существенный интересъ для спеціалистовъ дѣла, по порученію проф. А. В. Клоссовскаго лѣтомъ 1898 года имъ было приступлено къ магнитной съемкѣ южной Россіи. На первый разъ онъ ограничился крайне детальнымъ изученіемъ магнитныхъ свойствъ

Криворожскаго руднаго района, причемъ здѣсь ему удалось обнаружить цѣлый рядъ крупнѣйшихъ магнитныхъ аномалій, далеко оставляющихъ за собой даже столь прославленную Курскую. Послѣдующіе два года П. Т. былъ занятъ изученіемъ обширной литературы, касающейся вопросовъ земного магнетизма, и разработкой какъ эмпирической, такъ и теоретической, произведенныхъ въ 1898 г. наблюденій. Крайне интересные результаты этой разработки послужили предметомъ цѣлой серіи сообщеній въ засѣданіяхъ Новороссійскаго общества естествоиспытателей,—сообщеній, которыя представили большой интересъ и не для однихъ только спеціалистовъ. Можно было не соглашаться съ воззрѣніями П. Т., но ни въ какомъ случаѣ нельзя было отказать ни результатамъ въ высокомъ научномъ достоинствѣ, ни автору — въ умѣньи пользоваться обширнымъ матеріаломъ и вести изслѣдованіе, что дано далеко не всякому.... Обширный трактатъ покойнаго: „Магнитныя аномаліи Криворожскаго руднаго района", представляющій собою результатъ его долголѣтней безпрерывной работы и заканчивающійся печатаніемъ въ настоящее время, является въ высшей степени цѣннымъ вкладомъ и не только въ русскую науку. Результаты, полученные на основаніи наблюденій 1898 г., не удовлетворили однако П. Т. Лѣтомъ нынѣшняго года онъ предпринялъ продолженіе начатаго 2 года тому назадъ дѣла и произвелъ болѣе 400 опредѣленій магнитныхъ элементовъ въ различныхъ мѣстахъ Крыма, Новороссіи и Приднѣпровья и получилъ опять таки рядъ интересныхъ результатовъ, отчасти доложенныхъ въ засѣданіяхъ 13 октября и 2 ноября. Полной разработки полученныхъ данныхъ П. Т. закончить не удалось.... 12 ноября его не стало... Жертвой рока палъ человѣкъ, полный энергіи, талантливый работникъ на поприщѣ науки, человѣкъ, отъ котораго можно было еще столь многого ожидать въ будущемъ.

И нашъ журналъ не мало обязанъ покойному. Въ періодъ редактированія журнала Э. К. Шпачинскимъ, П. Т. принималъ живое участіе въ качествѣ его ближайшаго помощника.

О нѣкоторыхъ методахъ рѣшенія задачъ тригонометріи на плоскости.

С. Шатуновскаго въ Одессѣ.

*(Продолженіе *).*

§ 12. *Третья группа задачъ.* Даны значенія трехъ однородныхъ функцій k_1, k_2, k_3 одного измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника. Ищутся величины его угловъ A, B, C.

---

*) См. № 265 „Вѣстника".

Рѣшеніе задачъ этой группы, характеризующейся тѣмъ, что *не данъ ни одинъ изъ угловъ треугольника,* представляетъ вообще значительныя техническія трудности. Изъ наиболѣе употребительныхъ методовъ рѣшенія упомянемъ вскользь о методахъ, имѣющихъ геометрическій характеръ.

I. Если извѣстно геометрическое рѣшеніе задачи, т. е. если мы умѣемъ *построить* треугольникъ по даннымъ функціямъ k_1, k_2, k_3 его линейныхъ элементовъ, то, опредѣляя элементы последовательно построенныхъ вспомогательныхъ треугольниковъ, легко вычислить и углы искомаго треугольника.

II. Пользуясь устанавливаемыми въ геометріи соотношеніями между сторонами треугольника и различными его линейными элементами, выразимъ k_1, k_2 и k_3 въ функціи сторонъ треугольника, что приведетъ насъ къ системѣ трехъ уравненій

$$K_1 = k_1;\; K_2 = k_2;\; K_3 = k_3,$$

гдѣ K_1, K_2, K_3 суть функціи отъ однѣхъ сторонъ треугольника a, b, c. Опредѣливъ изъ этихъ уравненій a, b, c, приведемъ задачу къ рѣшенію треугольника по тремъ сторонамъ.

III. Допустимъ, что мы умѣемъ опредѣлять углы треугольника по величинѣ трехъ функцій k'_1, k'_2, k'_3 его линейныхъ элементовъ. Пользуясь различными геометрическими соотношеніями между элементами треугольника, найдемъ, если возможно, три такія функціи $\varphi_1(k_1, k_2, k_3)$, $\varphi_2(k_1, k_2, k_3)$, $\varphi_3(k_{,}, k_2, k_3)$, чтобы

$$\frac{k'_1}{\varphi_1} = \frac{k'_2}{\varphi_2} = \frac{k'_3}{\varphi_3}.$$

Такъ какъ величины k_1, k_2, k_3 извѣстны, то извѣстны и величины φ_1, φ_2, φ_3. Искомый треугольникъ будетъ подобенъ одному изъ тѣхъ треугольниковъ, въ которыхъ $k'_1 = \varphi_2$; $k'_1 = \varphi_2$; $k'_3 = \varphi_3$. Такимъ образомъ задача приведена къ другой, рѣшеніе которой уже извѣстно.

Примѣромъ можетъ служить извѣстная задача, въ которой $k_1 = h_a$; $k_2 = h_b$; $k_3 = h_c$. Взявъ $k'_1 = a$; $k'_2 = b$; $k'_3 = c$ $\varphi_1 = \frac{1}{h_a}$; $\varphi_2 = \frac{1}{h_b}$; $\varphi_3 = \frac{1}{h_c}$, имѣемъ

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{h_a}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{1}{h_b}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{1}{h_a}\right)}$$

и, слѣдовательно, опредѣленіе угловъ искомаго треугольника приведено къ рѣшенію треугольника, въ которомъ стороны равны $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$.

§ 13. Оставляя въ сторонѣ эти и подобные имъ пріемы, обратимся къ опредѣленію угловъ A, B, C прямо изъ уравненій, соотвѣтствующихъ задачѣ.

Легко видѣть, что для опредѣленія угловъ треугольника достаточно знать величины q_1 и q_2 отношеній двухъ изъ трехъ функцій k_1, k_2, k_3 къ одной изъ нихъ. Уравненія, соотвѣтствующія задачѣ, будутъ

$$A + B + C = 180^0,\ f_1 = q_1,\ f_2 = q_2,$$

гдѣ f_1 и f_2, по теоремѣ § 4, будутъ функціи отъ однихъ угловъ треугольника. Мы ограничимся разсмотрѣніемъ только тѣхъ двухъ случаевъ, когда прямое исключеніе изъ этихъ уравненій двухъ изъ трехъ неизвѣстныхъ A, B, C приводитъ къ окончательному уравненію, степень котораго выше числа различныхъ геометрическихъ рѣшеній.

Первый случай. Функціи q_1 и q_2 симметричны относительно *двухъ и только двухъ* изъ трехъ количествъ a, b, c, напримѣръ, относительно b и c. Разсужденія, подобныя изложеннымъ въ § 9, приводятъ къ тому заключенію, что степень окончательнаго уравненія, изъ котораго опредѣляется уголъ B или уголъ C, будетъ вдвое выше числа геометрически различныхъ рѣшеній, а потому за искомое задачи слѣдуетъ принять тригонометрическую функцію угла $\frac{A}{2p}$, гдѣ p прилично выбранное число. Для исключенія угловъ B и C бываетъ полезно ввести въ разсмотрѣніе вспомогательный уголъ $\frac{B-C}{2p}$. Полагая $\frac{B-C}{2p} = x$, получимъ

$$B = 90^0 - (A - px);\ C = 90^0 - (A + px),$$

а потому уравненія $f_1 = q_1$, $f_2 = q_2$ преобразуются въ

$$f_1\left(\sin\frac{A}{2p},\ \cos\frac{A}{2p},\ \cos x\right) = q_1$$

$$f_2\left(\sin\frac{A}{2p},\ \cos\frac{A}{2p},\ \cos x\right) = q_1$$

(эти уравненія не будутъ содержать $\sin x$, какъ это показано было въ § 9). Исключивъ отсюда $\cos x$, получимъ окончательное уравненіе

$$\varphi\left(\sin\frac{A}{2p},\ \cos\frac{A}{2p}\right) = 0$$

для опредѣленія угла A. Найдя A, опредѣлимъ $\cos x$, а затѣмъ B и C. Такимъ образомъ имѣемъ

Правило пятое. Если даны двѣ функціи q_1 и q_2 нулевого измѣренія относительно линейныхъ элементовъ треугольника и если эти функціи симметричны относительно буквъ b и c, но не отно-

сительно a и c, то выгодно искать уголъ A, вводя вспомогательную неизвѣстную $\cos\frac{B-C}{2p}$, гдѣ p прилично выбранное число.

Замѣчаніе первое. Если заданы три однородныя функціи k_1, k_2, k_3 одного измѣренія, изъ коихъ каждая симметрична относительно b и c, то можемъ взять q_1 и q_2 соотвѣтственно равными отношеніямъ двухъ изъ трехъ функцій k_1, k_2, k_3 къ третьей.

Замѣчаніе второе. Если транспозиція буквъ b и c оставляетъ неизмѣнною одну изъ трехъ заданныхъ функцій k_1, k_2, k_3, напримѣръ k_3, но переводитъ k_1 въ k_2 и k_2 въ k_1, то можемъ составить изъ k_1, k_2, k_3 слѣдующія функціи нулевого измѣренія, симметричныя относительно b и c:

$$\frac{k_1+k_2}{k_3},\ \frac{k_1k_2}{k_3^2},\ \left(\frac{k_1-k_2}{k_3}\right)^2,\ \frac{k_1+k_2-k_3}{k_1+k_2+k_3},\ \frac{(k_2+k_3-k_1)(k_1+k_3-k_2)}{k_1k_2},$$

$$\frac{(k_1+k_2+k_3)(k_1+k_2-k_3)}{k_1k_2}\ \text{и т. п.}$$

и положить q_1 и q_2 соотвѣтственно равными двумъ изъ этихъ функцій, наблюдая при этомъ, чтобы взятыя двѣ функціи не были функціями одна другой, каковы, напримѣръ, двѣ функціи

$$\frac{k_1+k_2}{k_3}\ \text{и}\ \frac{k_1+k_2-k_3}{k_1+k_2+k_3}=\frac{(k_1+k_2):k_3+1}{(k_1+k_2):k_3-1}.$$

Обыкновенно полагаютъ $q_1=\frac{k_1+k_2}{k_3}$ и $q_2=\frac{k_1k_2}{k_3^2}$, ибо всякая симметрическая функція отъ k_1 и k_2 есть функція отъ k_1+k_2 и k_1k_2.

Примѣры:

1. Даны $q_1=\frac{bh_c+ch_b}{2aR}$ и $q_2=\frac{r_a}{r}\cdot$ Опредѣлить A, B и C. Обѣ функціи q_1 и q_2 симметричны относительно b и c. Имѣемъ

$$q_1=\frac{b\sin B+c\sin C}{2R}\ \sin^2B+\sin^2C=\sin^2A+2\sin B\sin C\cos A\ ^{*)}=$$

$$=1+\cos A\cos(B-C)=2\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos A\cos^2\frac{B-C}{2}\right),$$

$$q_2=\frac{r_a}{r}=\frac{p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{\Delta}=\frac{16\cos\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

поэтому

$$\frac{q_2+2}{q_2-2}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

---

*) Изъ равенства $1=\frac{b^2+c^2-2bc\cos A}{a^2}$ находимъ $\sin^2B+\sin^2C=$ $=\sin^2A+2\sin B\sin C\cos A$.

Исключивъ $\cos\frac{B-C}{2}$, получимъ

$$2\left[1+\left(\frac{q_2+2}{q_2-2}\right)^2\cos A\right]\sin^2\frac{A}{2}=q_1.$$

Замѣняя здѣсь $2\sin^2\frac{A}{2}$ черезъ $1-\cos A$, получимъ квадратное уравненіе для опредѣленія $\cos A$.

2. Даны h_b, h_c $2r$. Ищутся A, B и C. Транспозиція буквъ b и c, оставляя $2r$ безъ измѣненія, переводитъ h_b въ h_c и наоборотъ, поэтому имѣемъ

$$\frac{h_b+h_a}{2r}=\frac{ap(\sin B+\sin C)}{\Delta}=\frac{2\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}};$$

$$\frac{h_bh_c}{(2r)^2}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}}.$$

Для исключенія $\cos\frac{B-C}{2}$ достаточно вычесть первое равенство изъ второго, что даетъ

$$\frac{h_bh_c}{(2r)^2}-\frac{h_b+h_c}{2r}=-\cos^2\frac{A}{2},$$

поэтому

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(h_b-2r)(h_c-2r)}{(2r)^2}.$$

3. Даны медіаны m_a, m_b, m_c. Ищутся углы A, B и C. Транспозиція буквъ b и c не измѣняетъ m_a и переводитъ m_b въ m_c, а m_c въ m_b. Поэтому имѣемъ

$$q_1=\frac{m_b^2+m_c^2}{m_a^2}=\frac{4a^2+b^2+c^2}{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{4\sin^2A+(\sin^2B+\sin^2C)}{2(\sin^2B+\sin^2C)-\sin^2A}=$$

$$=\frac{5\sin^2A+2\sin B\sin C\cos A}{\sin^2A+4\sin B\sin C\cos A},\text{ откуда}$$

$$\sin^2B+\sin^2C=\frac{q_1+4}{2q_1-1}\sin^2A;\quad 2\sin B\sin C=\frac{5-q_1}{2q_1-1}\cdot\frac{\sin^2A}{\cos A}$$

$$q_2=\left(\frac{m_b^2-m_c^2}{m_a^2}\right)^2=\frac{9(b^2+c^2)^2-(6bc)^2}{[2(b^2+c^2)-a^2]^2}=\frac{9(\sin^2B+\sin^2C)^2-(6\sin B\sin C)^2}{[2(\sin^2B+\sin^2C)-\sin^2A]^2}.$$

Замѣняя здѣсь $\sin^2B+\sin^2C$ и $\sin B\sin C$ ихъ выраженіями въ функціи A на основаніи двухъ предыдущихъ равенствъ и сокращая на $\sin^4A$, находимъ, что $\cos^2A$ раціонально выражается въ функціи m_a^2, m_b^2 и m_c^2.

§ 14. Займемся теперь разсмотрѣніемъ двухъ гоніометрическихъ задачъ, рѣшеніе которыхъ намъ необходимо для дальнѣйшихъ тригонометрическихъ изслѣдованій.

Пусть α, β, γ будутъ три угла коихъ сумма равна s и допустимъ что намъ даны четыре равенства

$$\Sigma\alpha=s;\ \Sigma t(\alpha)=x,\ \Sigma[t(\alpha)t(\beta)]=y;\ t(\alpha)t(\beta)t(\gamma)=z,$$

гдѣ t обозначаетъ одну изъ тригонометрическихъ функцій tg, sin или cos, $\Sigma\alpha$ есть сумма трехъ угловъ α, β, γ, $\Sigma t(\alpha)$ сумма тригонометрическихъ функцій t этихъ трехъ угловъ, $\Sigma[t(\alpha)t(\beta)]$ есть сумма $t(\alpha)t(\beta)+t(\alpha)t(\gamma)+t(\beta)t(\gamma)$ двойныхъ произведеній тригонометрическихъ функцій t угловъ α, β, γ. Требуется найти зависимость между s, x, y, z, т. е. нужно исключить α, β, γ изъ данной системы четырехъ уравненій.

Задача легко рѣшается, когда t означаетъ tg, ибо, взявъ тангенсы обѣихъ частей равенства $\alpha+\beta+\gamma=s$, получимъ

$$\frac{x-z}{1-y}=\operatorname{tg}s\cdot$$

Если $s=2k.90^0$, гдѣ k цѣлое, то $x=z$, если $s=(2k+1)90^0$, гдѣ k цѣлое, то $y=1$.

Во всѣхъ прочихъ случаяхъ можемъ писать $x+y\operatorname{tg}s-z=\operatorname{tg}s$.

Итакъ, если $\Sigma\alpha=s$, $\Sigma\operatorname{tg}\alpha=x$, $\Sigma(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=y$, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=z$, то вообще

$$x+y\operatorname{tg}s-z=\operatorname{tg}s\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

и въ частности, когда $s=2k.90^0$ или $(2k+1)90^0$, гдѣ k цѣлое, имѣемъ соотвѣтственно

$$x=z \text{ или } y=1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2)$$

(См. § 1, равенства 6. и 8.). Пусть теперь t будетъ sin, такъ что

$$\Sigma\alpha=s;\ \Sigma\sin\alpha=x;\ \Sigma(\sin\alpha\sin\beta)=y;\ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=z\cdot$$

Возведя въ квадратъ обѣ части каждаго изъ равенствъ $\Sigma\sin\alpha=x$; $\Sigma(\sin\alpha\sin\beta)=y$, получимъ соотвѣтственно два равенства

$$\Sigma\sin^2\alpha+2\Sigma(\sin\alpha\sin\beta)=x^2;\ \Sigma(\sin^2\alpha\sin^2\beta)+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\Sigma\sin\alpha=y^2,$$

поэтому

$$\Sigma\sin^2\alpha=x^2-2y;\ \Sigma(\sin^2\alpha\sin^2\beta)=y^2-2zx.$$

Пользуясь этими равенствами легко найдемъ выраженія для $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$ и $\Sigma(\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma)$ въ функціи x, y и z.

Дѣйствительно,

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma=(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)=$$
$$=1-\Sigma\sin^2\alpha+\Sigma(\sin^2\alpha\sin^2\beta)-(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2=$$
$$=1-x^2+2y+y^2-2zx-z^2=(1+x+y+z)(1-x+y-z).$$

Далѣе,

$$\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)(1-\sin^2\gamma)=$$
$$=\sin^2\alpha-(\sin^2\alpha\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\gamma)+(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2.$$

Сложивъ это равенство съ тѣми двумя равенствами, которыя выводятся изъ него, перемѣщеніемъ буквъ α и β и α и γ, получимъ

$$\Sigma(\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)=\Sigma\sin^2\alpha-2\Sigma(\sin^2\alpha\sin^2\beta)+3(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)^2=$$
$$=x^2-2y+2y^2-4zx+3z^2.$$

Обращаясь теперь къ равенству $\alpha+\beta+\gamma=s$ и взявъ синусы и косинусы отъ обѣихъ его частей, найдемъ соотвѣтственно послѣ весьма простыхъ преобразованій

$$\Sigma(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma)=z+\sin s,$$
$$\Sigma(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos s.$$

Возводя въ квадратъ обѣ части перваго изъ этихъ равенствъ, получимъ

$$\Sigma(\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)=(z+\sin s)^2.$$

Пользуясь-же предпослѣднимъ равенствомъ и замѣщая $\Sigma(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)$, получаемъ

$$\Sigma(\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos\gamma+2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma-(z+\sin s)^2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos s,$$

поэтому

$$[\Sigma(\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)+2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma-(z+\sin z)^2]^2=$$
$$=4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\cos^2s.$$

Замѣщая здѣсь $\Sigma(\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma)$ и $\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$ ихъ вышенайденными выраженіями въ функціи x, y и z, получимъ искомое соотношеніе

$$(x^2-2y+2z\sin s-2+\sin^2 s)^2=4(1+x+y+z)(1-x+y-z)\cos^2 s.$$

Итакъ, если для трехъ угловъ α, β и γ

$$\Sigma\alpha=s;\ \Sigma\sin\alpha=x;\ \Sigma(\sin\alpha\sin\beta)=y;\ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=z,$$

то ..... (3)

$$(x^2-2y+2z\sin s-2+\sin^2 s)^2=4(1+x+y+z)(1-x+y-z)\cos s.$$

Если въ этихъ равенствахъ замѣстимъ α, β и γ соотвѣтственно черезъ $90^0-\alpha$, $90^0-\beta$, $90^0-\gamma$ и обозначимъ сумму этихъ трехъ угловъ черезъ 270^0-s, то $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin s$, $\cos s$ перей-

дутъ соотвѣтственно въ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, $-\cos s$, $-\sin s$, а сумма $\alpha+\beta+\gamma$ опять будетъ равна s. Отсюда слѣдуетъ, что если для трехъ угловъ α, β и γ

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\alpha = s;\ \Sigma\cos\alpha = x;\ \Sigma(\cos\alpha\cos\beta) = y;\ \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = z,\\ \text{то}\\ (x^2-2y-2z\cos s-2+\cos^2 s)^2 = 4(1+x+y+z)(1-x+y-z)\sin^2 s\end{array}\right\}\ldots\ (4)$$

Въ частности, для угловъ A, B, C треугольника получаются слѣдующіе выводы:

Если

$$\left.\begin{array}{l}\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=x,\\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}+\\ \qquad+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=y,\\ \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=z\end{array}\right\}\text{ или если }\left\{\begin{array}{l}\cos A+\cos B+\cos C=x,\\ \cos A\cos B+\cos A\cos C+\\ \qquad+\cos B\cos C=y,\\ \cos A\cos B\cos C=z,\end{array}\right.$$

то

$$x^2-2y+2z-1=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Если же

$$\left.\begin{array}{l}\sin A\sin B+\sin C=x,\\ \sin A\sin B+\sin A\sin C+\\ \qquad+\sin B\sin C=y,\\ \sin A\sin B\sin C=z\end{array}\right\}\text{ или если }\left\{\begin{array}{l}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos=x\\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\\ \qquad+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=y\\ \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=z,\end{array}\right.$$

то

$$x^4-4yx^2+8zx+4z^2=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

Первое и четвертое изъ этихъ положеній выводимъ соотвѣтственно изъ равенствъ (3) и (4), полагая въ нихъ $\alpha=\frac{A}{2}$, $\beta=\frac{B}{2}$, $\gamma=\frac{C}{2}$, $\alpha+\beta+\gamma=s=90^0$. Третье и второе положенія выводимъ изъ тѣхъ же равенствъ, полагая $\alpha=A$; $\beta=B$; $\gamma=C$, $\alpha+\beta+\gamma=s=180^0$.

(Окончаніе слѣдуетъ).

ЖИЗНЬ ВЕЩЕСТВА.

Рѣчь, произнесенная при открытіи Швейцарскаго общества естествоиспытателей въ Невшателѣ Ш. Э. Гильомомъ, физикомъ международнаго бюро мѣръ и вѣсовъ.

Переводъ съ французскаго М. Е. Вейнбергъ въ Одессѣ.

*(Окончаніе. *)*

То же самое имѣетъ мѣсто со многими тѣлами. Стекло, подвергнутое дѣйствію внѣшней силы, сначала медленно сгибается, но вскорѣ это сгибаніе останавливается; химическія соединенія, которыя его образуютъ, измѣняются, приспособляясь къ давленію, которому оно подвергнуто. Когда же это давленіе прекращается, стекло медленно возвращается къ своей первоначальной формѣ, при чемъ постепенно возстановляются прежнія соединенія. Стекло приспособилось къ внѣшнимъ условіямъ, совсѣмъ какъ живой организмъ.

Оптическія явленія даютъ намъ многочисленные примѣры приспособленія. Возьмемъ фосфоресцирующія тѣла. Хорошо извѣстно, что всѣ эти тѣла представляютъ собой твердый растворъ небольшой доли посторонняго тѣла въ другомъ, вообще говоря, сложномъ тѣлѣ. Подъ дѣйствіемъ свѣта эти соединенія измѣняются; но какъ только внѣшнее воздѣйствіе перестаетъ оказывать свое вліяніе, законное соединеніе вступаетъ въ свои права иногда довольно быстро, большею же частью крайне медленно, испуская при этомъ свѣтъ.

Однако въ небольшой пропорціи соединенія, образовавшіяся подъ дѣйствіемъ свѣта, вообще говоря, совмѣстимы съ новыми условіями, и возстановленіе прежнихъ соединеній прекращается тогда нѣсколько раньше, чѣмъ окончательно наступитъ прежнее равновѣсіе. Нѣкоторыя незаконныя связи, такъ сказать, терпимы въ этой общественной организаціи и могутъ поддерживаться неопредѣленно долго. Но достаточно бросить на тѣло небольшое количество красныхъ или интра-красныхъ лучей, сейчасъ же замѣчается появленіе слабаго свѣта, зависящаго отъ того, что новые атомы-узурпаторы энергично выталкиваются и вполнѣ замѣщаются законными атомами; послѣ этого равновѣсіе оказывается окончательно возстановленнымъ.

Говоря языкомъ физиковъ, мы скажемъ, что физико-химическое равновѣсіе фосфоресцирующихъ тѣлъ есть функція свѣта, который они получаютъ, но что эта функція зависитъ еще отъ тренія. Возбуждающій фосфоресценцію свѣтъ дѣйствуетъ такъ, какъ дѣйствовали бы толчки на кучу песка—уничтожая вліяніе треній.

*) См. № 286 „Вѣстника“.

Съ этой особой точки зрѣнія фосфоресцирующія тѣла представляютъ какъ бы подобіе соціальнаго организма. Но изъ всего, что намъ даетъ неодушевленное царство, наилучшимъ, быть можетъ, примѣромъ этого рода явленій, служитъ цвѣтная фотографія по способу Беккереля.

Положимъ, что на сѣроватое-хлористое или іодистое серебро подѣйствуетъ свѣтъ опредѣленной окраски, красный, напримѣръ. Черезъ нѣсколько времени оно станетъ краснымъ. Если теперь подѣйствовать на него зеленымъ свѣтомъ—оно мѣняетъ окраску, проходитъ черезъ блѣдноватые и грязноватые оттѣнки и въ концѣ концовъ становится однородно-зеленымъ.

Что же произошло въ тѣлѣ? Извѣстно, что окраска пигмента указываетъ намъ просто на родъ того свѣта, который онъ отражаетъ—а, слѣдовательно, того, который въ него не проникаетъ. Когда красный цвѣтъ падаетъ на хлористое серебро, оно его поглощаетъ и, подъ дѣйствіемъ этого внѣшняго источника энергіи, измѣняется; при этомъ оно въ случайномъ порядкѣ проходитъ чрезъ всѣ состоянія, какія для него вообще возможны. Но, если въ одномъ изъ этихъ состояній хлористое серебро само имѣетъ красный цвѣтъ, то оно отсылаетъ этотъ свѣтъ обратно; съ этого момента прекращается воздѣйствіе свѣта на серебро. Тотъ же процессъ однако тотчасъ возобновляется, если на него попадаетъ другой свѣтъ. *)

Итакъ, хлористое серебро защищаетъ себя и измѣняется, чтобы лучше предохранить себя. Свѣтъ—его врагъ, и оно безпрестанно мѣняетъ свою систему обороны, чтобы не ощущать его постоянныхъ нападеній. Оно воздвигаетъ на своей границѣ систему крѣпостей, принаровленную къ силамъ врага и всегда готовую его отразить. Развѣ это не любопытнѣйшее подобіе организма или прочно установленной общественной организаціи?

Теперь уже мы подошли близко къ задачамъ физіологіи. Хлористое серебро не только даетъ намъ отдаленное подобіе инстинктивной жизни; но и тѣ превращенія, измѣненія цвѣта, которыя оно испытываетъ подъ дѣйствіемъ свѣта, имѣютъ поразительную аналогію съ измѣненіями того же рода, которыя испытываютъ вещества, играющія въ живомъ организмѣ роль первостепенной важности. Достаточно упомянуть о хлорофилѣ, о кожномъ пигментѣ, особенно сильно развитомъ у негровъ, и о пурпурѣ сѣтчатки. Невозможно однако не признать—по крайней мѣрѣ относительно двухъ послѣднихъ тѣлъ — полнаго приспособленія къ условіямъ жизни на землѣ, являющагося ихъ основнымъ свойствомъ, и особаго рода чувствительности, обусловливаемой въ нихъ природою солнечнаго свѣта.

---

*) См. по этому предмету прекрасный мемуаръ Otto Wiener'a: „Farbenphotographie durch Koerperfarben, und mechanische Farbenanpassung in der Natur". (Цвѣтная фотографія при посредствѣ цвѣтовъ тѣлъ и механическое приспособленіе къ цвѣтамъ въ природѣ). (Wied. Ann. t. 55, p. 225; 1895).

Краткое разсужденіе сдѣлаетъ эту аналогію болѣе понятной. Съ перваго взгляда можетъ показаться изумительнымъ, что негры, постоянно подвергающіеся воздѣйствію жгучихъ лучей солнца, имѣютъ цвѣтъ, какъ разъ наиболѣе поглощающій,—тотъ, который долженъ непремѣнно сдѣлать имъ эти лучи невыносимыми. Но, всматриваясь ближе, мы приходимъ къ убѣжденію, что и здѣсь эта особенность не есть ошибка природы. Опытъ, знакомый всѣмъ, кому случалось живать подъ палящимъ солнцемъ, намъ показываетъ, что мы начинаемъ легко переносить его излученіе только тогда, когда наша кожа приняла тотъ прекрасный мѣдный цвѣтъ, съ которымъ возвращаются альпинисты со своихъ экскурсій. Обобщая это наблюденіе, Моссо замѣтилъ, что солнечные лучи на высокихъ горахъ переносятся еще легче, если покрыть себя слоемъ сажи, т. е. сдѣлать себя на этотъ разъ негромъ. Причина этого явленія проста: отъ дѣйствія солнечныхъ лучей, въ особенности отъ лучей съ короткой волной, болѣе всего страдаетъ эпидерма; этимъ объясняется чувствительность, которую къ нимъ проявляютъ альбиносы. Поэтому нужно было особенно позаботиться о томъ, чтобы предохранить эпидерму отъ проникновенія фіолетовыхъ и ультра-фіолетовыхъ лучей.

Что касается до пурпура сѣтчатки, который позволяетъ намъ различать формы тѣлъ, но не цвѣта ихъ и, благодаря своей поразительной чувствительности, служитъ для зрѣнія въ полутемнотѣ, то онъ, повидимому, у всѣхъ породъ животныхъ, которые имъ надѣлены, обладаетъ наибольшей способностью поглощенія, какая только возможна; поэтому его чувствительность особенно интенсивна по отношенію къ той области солнечнаго спектра, гдѣ энергія максимальна. Другими словами, онъ утилизируетъ возможно лучшимъ образомъ бѣлый свѣтъ, онъ приспособленъ къ этому свѣту.

Мы теперь ушли очень далеко отъ жизни вещества въ томъ смыслѣ, въ которомъ мы о ней говорили въ началѣ нашей рѣчи. Однако тотъ фактъ, что мы могли перейти незамѣтно и непрерывно отъ свойствъ неорганизованнаго вещества, разсматриваемаго въ отдѣльности, къ роли, которую оно играетъ въ живомъ существѣ, показываетъ намъ, что не было слишкомъ смѣло основываться на явленіяхъ, сравнительно простыхъ, изученныхъ въ инертномъ веществѣ для того, чтобы лучше понимать явленія, происходящія въ живой матеріи.

Но пора кончить.

Можетъ быть, нѣкоторые смѣлые умы, склонные заглядывать въ отдаленныя перспективы и пренебрегающіе промежуточными стадіями и трудностями, хотѣли бы перекинуть мостъ и усмотрѣть дѣйствительную непрерывную связь между процессами, происходящими въ неорганическомъ веществѣ, и функціями живой клѣтки. Возможно, что этотъ мостъ когда нибудь и будетъ брошенъ; но утверждать это, или попробовать осуществить его, было бы преждевременно; это повело бы къ многочисленнымъ разочарованіямъ.

Не будемъ же заходить слишкомъ за предѣлы того, чему насъ научилъ опытъ; будемъ терпѣливо ждать и предоставимъ идеѣ продолжать свое развитіе медленно, но вѣрно по пути къ совершенству. Можетъ быть, въ отдаленномъ будущемъ будутъ найдены весьма тѣсныя связи, которыя узаконятъ самыя смѣлыя заключенія. Но не надо упускать изъ виду нашу точку отправленія; лучше, ограничиваясь тѣмъ, что будемъ разсматривать превращенія вещества, какъ нѣкоторую внутреннюю его жизнь, постараемся яснѣе ихъ понять, чтобы помочь нашему уму въ изученіи настоящей жизни.

Наука живетъ надеждой и искреннимъ трудомъ. Утверждать болѣе, чѣмъ можно доказать, не дѣло человѣка науки—это значитъ быть плохимъ пастыремъ; это значитъ оправдывать тѣхъ, которые, зная только отрицательныя стороны науки, рѣшаются утверждать, что она не исполняетъ своего назначенія.

Новое доказательство трансцендентности чиселъ π и e.

(Доказательство Θ. Валена).

Прив.-Доцента В. Кагана въ Одессѣ.

(Продолженіе.)*

Въ 1893 году молодой германскій математикъ Д. Гильбертъ (нынѣ профессоръ Геттингенскаго университета) опубликовалъ въ „Извѣстіяхъ Ученаго Общества при Геттингенскомъ Университетѣ" небольшую работу, содержащую новое доказательство теоремъ Эрмита и Линдемана. [1]) По идеѣ доказательство Гильберта совпадаетъ съ методомъ Эрмита. Гильбертъ также пишетъ равенство, невозможность котораго онъ хочетъ доказать, умножаетъ его лѣвую часть на нѣкотораго множителя N, разбиваетъ каждый членъ на цѣлую и дробную часть и затѣмъ обнаруживаетъ, что при надлежащемъ выборѣ числа N сумма дробныхъ частей составляетъ правильную дробь, отличную отъ нуля; поэтому, прибавляя къ ней цѣлое число мы не можемъ получить нуля. Достигнутое Гильбертомъ упрощеніе заключается въ томъ,

[1]) *D. Hilbert.* „Ueber die Transzendenz der Zahlen e und π." Nachrichten der K. Ges. der Wiss. an der G.—A.—Univ. zu Göttingen. 1893. Множитель, которымъ пользуется Гильбертъ выражается такъ:

$$N = \frac{1}{\rho!}\int_0^\infty z^\rho[(z-1)(z-2)\ldots(z-n)]^{\rho+1}e^{-z}dz.$$

*) См. № 286 „Вѣстника".

что онъ удачно выбралъ множитель N и удачно разбиваетъ члены на цѣлую и дробную часть. Впрочемъ для той и другой цѣли онъ пользуется опредѣленными интегралами; но самыя разсужденія по своей простотѣ не могутъ идти въ сравненіе съ прежними изслѣдованіями. Въ томъ же томѣ „Извѣстій Гет. Уч. Общества" помѣщена замѣтка А. Гурвитца [1]) по поводу статьи Гильберта. Такъ какъ Гильбертъ сообщилъ ему въ письмѣ свое доказательство, то онъ успѣлъ обнаружить, что интегралы играютъ у Гильберта, въ сущности, формальную роль и потому отъ нихъ можно избавиться. Гурвитцъ пользуется только дифференціальнымъ исчисленіемъ, что вноситъ значительное упрощеніе. [2]) Доказательства Гильберта и Гурвитца перепечатаны въ 43-мъ томѣ журнала „Mathematische Annalen"; но тамъ-же помѣщена статья Гордана, который освобождаетъ доказательство Гурвитца и отъ дифференціальнаго исчисленія. [3]) Работа Гордана опирается на элементарныя соображенія, но это одно изъ тѣхъ элементарныхъ доказательствъ, которыя обходятъ методы дифференціальнаго исчисленія при помощи тяжеловѣсныхъ пріемовъ формальнаго преобразованія. Искусственныя функціи, введенныя Горданомъ, создаютъ сложную символистику, непріятно поражающую послѣ изящныхъ работъ Гильберта и Гурвитца. Упрощеніе, достигнутое Горданомъ, чисто внѣшнее; но—такъ или иначе—оно доступно читателю, не обладающему высшимъ математическимъ образованіемъ, и потому естественно получило широкое распространеніе. Въ сборникѣ, выпущенномъ проф. Геттингенскаго университета Ф. Клейномъ, [4]) изложено доказательство Гордана въ очень доступной обработкѣ. [5])

Въ третьей тетради „Mathematische Annalen" за текущій годъ помѣщено письмо Ѳ. Валена къ профессору К. Гензелю. [6])

---

[1]) *A. Hurvitz.* „Beweis der Transzendenz der Zahl *e*." Ibidem.

[2]) Въ сущности Гурвитцъ пользуется только соотношеніемъ:

$$\Delta f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x).$$

[3]) *P. Gordan.* „Transcendenz von *e* und π." Mathem. Annalen. XLIII. 1893.

[4]) *F. Klein.* „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Ausgearbeitet von *F. Tägert.* Leipzig. 1895. Это сочиненіе переведено на русскій языкъ студентомъ *Н. Парфентьевымъ* подъ ред. пр.-доц. *Д. М. Синцова* и издано Казанскимъ Физико-математическимъ Обществомъ подъ заглавіемъ: „Лекціи по избраннымъ вопросамъ элементарной геометріи". *Казань.* 1898. Эта небольшая книга заслуживаетъ самаго серьезнаго вниманія.

[5]) Впрочемъ въ доказательствѣ самаго общаго предложенія Линдемана, формулированнаго нами въ концѣ страницы 230-ой, въ этомъ сочиненіи допущена, на нашъ взглядъ, погрѣшность, дѣлающая доказательство непригоднымъ. Именно въ § 4 главы IV не доказано, что коэффиціентъ C_0 послѣ приведенія остается отличнымъ отъ нуля. Между тѣмъ доказательство существенно предполагаетъ, что этотъ коэффиціентъ и всѣ показатели при *e* отличны отъ нуля.

[6]) *Th. Vahlen.* „Beweis des Lindemann'schen Satzes über die Exponentialfunction". Aus einem an K. Heusel gerichteten Briefe. Mat. Ann. B. 53. 1900.

Въ этомъ письмѣ Валенъ сообщаетъ, что размышленіе надъ доказательствомъ Гильберта привело его „къ чисто ариѳметически-алгебраическому доказательству предложенія Линдемана, которое опирается только на самыя элементарныя соображенія и свободно отъ символистики Гордана.“ Это доказательство и составляетъ содержаніе письма. Въ томъ сжатомъ видѣ, въ какомъ оно изложено въ письмѣ, доказательство Валена читается съ большимъ трудомъ. Но, разобравши его, нельзя не признать, что оно дѣйствительно очень элементарно и выгодно отличается отъ доказательства Гордана. Мы имѣемъ въ виду изложить это доказательство въ обработкѣ, доступной для читателей нашего журнала.

Чтобы не нарушать дальнѣйшаго изложенія посторонними промежуточными вычисленіями, мы займемся прежде всего выводомъ двухъ трехъ довольно извѣстныхъ тождествъ, на которыя опираются выводы Валена.

Пусть k и p будутъ два произвольныхъ цѣлыхъ положительныхъ числа. Тогда каждое изъ выраженій $(1-x)^p$, $(1-x)^{-k-p}$, $(1-x)^{-k}$ разлагается въ строку Ньютона; первая строка конечна, двѣ другія безконечны и сходятся для значеній x, которыя по абсолютной величинѣ меньше единицы. Если обозначимъ черезъ $\binom{p}{i}$ число сочетаній изъ p элементовъ по i, то разложенія эти могутъ быть представлены въ слѣдующемъ видѣ:

$$(1-x)^p = 1 - \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 - \dots + (-1)^p\binom{p}{p}x^p.$$

$$(1-x)^{-k-p} = 1 + \binom{k+p}{1}x + \binom{k+p+1}{2}x^2 + \binom{k+p+2}{3}x^3 + \dots.$$

$$(1-x)^{-k} = 1 + \binom{k}{1}x + \binom{k+1}{2}x^2 + \binom{k+2}{3}x^3 + \dots.$$

Однако произведеніе первыхъ двухъ изъ этихъ рядовъ должно совпадать съ третьимъ рядомъ. Коэффиціентъ при x^h въ третьемъ ряду есть $\binom{k+h-1}{h}$, въ произведеніи же двухъ первыхъ рядовъ коэффиціентъ при x^h выразится формулой

$$\binom{k+p+h-1}{h} - \binom{p}{1}\binom{k+p+h-2}{h-1} + \binom{p}{2}\binom{k+p+h-3}{h-2} - \dots$$

Если $h \leqq p$, то послѣднее слагаемое въ этой суммѣ есть

$$(-1)^h\binom{p}{h}. \tag{11}$$

Если же $h > p$, то послѣднее слагаемое въ этой суммѣ

имѣетъ видъ

$$(-1)^p\binom{p}{p}\binom{k+h-1}{h-p}. \qquad (11')$$

Слѣдовательно, при произвольныхъ цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ чиселъ h, k и p имѣетъ мѣсто тождество

$$\binom{k+p+h-1}{h}-\binom{p}{1}\binom{k+p+h-2}{h-1}+\binom{p}{2}\binom{k+p+h-3}{h-2}-\ldots=$$

$$=\binom{k+h-1}{h}.$$

Если теперь положимъ $k+p+h-1=q$, то три числа k, p и h замѣняются числами $q-p-h+1$, p, h; они положительныя, если $q \geqq p+h$, $p>0$, $h>0$; и при этихъ условіяхъ предыдущее тождество принимаетъ видъ

$$\binom{q}{h}-\binom{p}{1}\binom{q-1}{h-1}+\binom{p}{2}\binom{q-2}{h-2}-\ldots=\binom{q-p}{h}. \qquad (12)$$

Замѣняя здѣсь $\binom{q-i}{h-i}$ черезъ $\frac{(q-i)!}{(h-i)!\,(q-h)!}$, мы получимъ окончательно

$$\frac{q!}{h!}-\binom{p}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!}+\binom{p}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!}-\ldots=(q-h)!\binom{q-p}{h} \qquad (I).$$

Это тождество справедливо при всѣхъ цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ чиселъ q, p и h, для которыхъ $q \geqq p+h$. Послѣдній членъ лѣвой части, согласно выраженіямъ (11) и (11'), имѣетъ видъ

$$(-1)^h\binom{p}{h}(q-h)! \text{ или } (-1)^p\binom{p}{p}\frac{(q-p)!}{(h-p)!}, \qquad (13),$$

смотря по тому, будетъ ли $h \leqq p$ или $h>p$.

Принимая $h>p$ и замѣняя q черезъ x, мы можемъ представить равенство (12) въ такомъ видѣ:

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-h+1)}{h!}-\binom{p}{1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-h+1)}{(h-1)!}+$$

$$+\binom{p}{2}\frac{(x-2)(x-3)\ldots(x-h+1)}{(h-2)!}+\ldots+$$

$$+(-1)^p\binom{p}{p}\frac{(x-p)(x-p-1)\ \ldots\ (x-h+1)}{(h-p)!}= \qquad (14)$$

$$=\frac{(x-p)(x-p-1)\ \ldots\ .\ (x-p-h+1)}{h!}.$$

Если мы здѣсь будемъ разсматривать x, какъ количество перемѣнное, а h и p, какъ постоянныя, то обѣ части послѣдняго равенства будутъ цѣлые полиномы относительно перемѣнной x, степени не выше $h^{\text{ой}}$. Эти полиномы при безчисленномъ множествѣ значенiй перемѣнной x, именно, при всѣхъ цѣлыхъ значенiяхъ, превышающихъ $p+h$, имѣютъ одинаковыя численныя значенiя; слѣдовательно, эти полиномы тождественны. Съ другой стороны, не трудно видѣть, что всѣ члены этого тождества имѣютъ общiй множитель:

$$(x-p)(x-p-1)\ldots(x-h+1),$$

такъ какъ мы принимаемъ $p<h$. Удаляя этого общаго множителя, мы получимъ тождество:

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-p+1)}{h!}-\binom{p}{1}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)}{(h-1)!}+\ldots$$

$$+(-1)^i\binom{p}{i}\frac{(x-i)(x-i-1)\ldots(x-p+1)}{(h-i)!}+\ldots+(-1)^p\binom{p}{p}\frac{1}{(h-p)!}=$$

$$=\frac{(x-h)(x-h-1)\ldots(x-h-p+1)}{h!}. \qquad (15)$$

При $h=p$ тождество (14) безъ всякихъ преобразованiй имѣетъ видъ (15), если подъ символомъ $(h-p)!=0!$, какъ это обыкновенно дѣлаютъ, будемъ разумѣть *1*.*) Мы можемъ поэтому сказать, что тождество (15) имѣетъ мѣсто при всѣхъ цѣлыхъ значенiяхъ h и p, если $h\geqslant p$. Если теперь дадимъ здѣсь x цѣлое значенiе $q>p$ и замѣтимъ, что

$$\frac{(q-i)(q-i-1)\ldots(q-p+1)!}{(p-i)!}=\binom{q-i}{p-i}=\frac{(q-i)!}{(p-i)!(q-p)!}, \text{ т. е. что}$$

$$(q-i)(q-i-1)\ldots(q-p+1)=\frac{(q-i)!}{(q-p)!},$$

то получимъ, что при $q>p$

$$\frac{q!}{h!}-\binom{p}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!}+\binom{p}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!}+\ldots+(-1)^p\binom{p}{p}\frac{(q-p)!}{(h-p)!}=$$

$$=\frac{(q-p)!(q-h)(q-h-1)\ldots(q-h-p+1)}{h!} \qquad (16).$$

при $q>p\leqslant h$. Отсюда слѣдуетъ, что при $h\leqslant q<p+h$ правая часть имѣетъ множитель. равный нулю; а потому

$$\frac{q!}{h!}-\binom{p}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!}+\binom{p}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!}-\ldots=0 \qquad \text{II}$$

при $$p+h>q\geqslant h\geqslant p.$$

*) Послѣднiй членъ имѣетъ въ этомъ случаѣ формулу (11).

Если же $q < h$, то мы получимъ, сокращая правую часть равенства (16) на $(q-p)!$ и вынося въ числителѣ во всѣхъ двучленахъ (-1) за скобку, слѣдующее:

$$\frac{q!}{h!} - \binom{p}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!} + \binom{p}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!} - \ldots =$$

$$= (-1)^p \frac{(h-q)(h-q+1)\ldots(h-q+p-1)}{h.(h-1)\ldots(q-p+1)} \qquad \text{III}$$

при

$$p < q < h.$$

Тождества I, II и III мы и имѣли въ виду вывести. Они опредѣляютъ значенія одного и того же выраженія при $q > p + h$, ири $p + h > q \geqq h$ (если $h \geqq p$) и при $h > q > p$.

(Скончаніе слѣдуетъ).

ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Желая обставить въ нашемъ журналѣ обзоръ физико-математической литературы съ возможно большей полнотой, мы рѣшили установить для этого на будущее время два отдѣла.

Въ отдѣлѣ „Рецензіи“ мы будемъ помѣщать обстоятельные разборы сочиненій, которыя непосредственно входятъ въ программу „*Вѣстника*“. Такъ какъ значительное число компетентныхъ лицъ любезно изъявило готовность помочь намъ въ этомъ дѣлѣ, то мы надѣемся, что намъ удастся рецензировать не только присланныя въ редакцію сочиненія по опытной физикѣ и элементарной математикѣ, но и вообще всѣ важнѣйшія и новыя сочиненія по этимъ предметамъ. Рецензіи будутъ всегда помѣчаться полною подписью авторовъ ихъ. Въ этомъ же отдѣлѣ будутъ помѣщаться критическія статьи, присланныя намъ авторами по собственной ихъ инціативѣ; но объ этомъ будетъ сдѣлана соотвѣтствующая оговорка въ каждомъ частномъ случаѣ.

Въ отдѣлѣ „Библіографія“ мы будемъ помѣщать краткіе отзывы о новыхъ изданіяхъ сочиненій, которыя уже были разобраны въ „Вѣстникѣ“; свѣдѣнія о книгахъ, одобренныхъ Уч. Комитетомъ М. Н. П.; перечень, а иногда и краткое содержаніе важнѣйшихъ статей, помѣщаемыхъ въ періодическихъ изданіяхъ и т. п. Въ этомъ же отдѣлѣ будутъ помѣщаться краткія замѣтки о важнѣйшихъ русскихъ и иностранныхъ сочиненіяхъ по математикѣ, физикѣ и смежнымъ отраслямъ знанія, которыя по своему содер-

жанію выходятъ за предѣлы нашего журнала. Цѣль этихъ замѣтокъ—обратить вниманіе читателя на новую книгу, имѣющую большій или меньшій интересъ, хотя бы она и не входила непосредственно въ программу журнала. Эти замѣтки не будутъ имѣть характера критики, будутъ составляться ближайшими сотрудниками редакціи, а потому будутъ печататься безъ подписи авторовъ ихъ.

За недостаткомъ мѣста перечень присланныхъ въ редакцію сочиненій будетъ впредь помѣщаться не въ текстѣ, а на первой страницѣ обложки.

РЕЦЕНЗІИ.

Физико-Математическій Ежегодникъ, посвященный вопросамъ математики, физики, химіи и астрономіи въ элементарномъ изложеніи. *(Изданіе кружка авторовъ „Сборника въ помощь Самообразованія“)* **№ 1. 1900.** Составителямъ *„Сборника статей въ помощь Самообразованія“*, успѣхъ котораго „превзошелъ всякія ожиданія“, пришла хорошая мысль замѣнить предполагавшееся 2-ое изданіе книги выпускомъ въ свѣтъ каждый годъ по одной книжкѣ *„Физико-математическаго ежегодника“*; въ этомъ изданіи предполагается болѣе правильнымъ образомъ слѣдить за быстрыми успѣхами физико-математическихъ наукъ, „развивающихся не по днямъ, а по часамъ“.

Потребность въ такихъ періодическихъ изданіяхъ несомнѣнна; на это указываетъ какъ большой успѣхъ прежняго *„Сборника“*, такъ и одновременное существованіе и успѣхъ другихъ подобныхъ же изданій, напр. *„Научное Обозрѣніе“* (С.-Петербургъ), *„Вѣстникъ Опытной Физики и Элементарной Математики“* (Одесса), *„Физическое Обозрѣніе“* (Варшава).

Нечего и говорить о пользѣ такихъ общедоступныхъ научныхъ обзоровъ вообще для жаждущихъ пополнить свои научныя свѣдѣнія и для желающихъ слѣдить по возможности за движеніемъ науки, и въ особенности для преподавателей среднихъ школъ, не имѣющихъ времени и средствъ пользоваться для этой цѣли обширной спеціальной литературой. Польза очевидно можетъ быть весьма существенною. Уровень средняго преподаванія всегда ниже общаго современнаго уровня науки и отстаетъ отъ него значительно, иногда чуть ли не на цѣлое столѣтіе. Поэтому надо радоваться всякому хорошему новому орудію, могущему сколько нибудь поднять этотъ уровень.

Вышедшая недавно первая книжка „Физ.-Матем. Ежегодника“ заключаетъ въ себѣ очень много новаго, интереснаго и поучительнаго. Самыми капитальными вкладами въ ней являются, по моему мнѣнію, самостоятельныя статьи двухъ видныхъ русскихъ ученыхъ: А. С. Попова (Телеграфированіе безъ проводовъ) и Ѳ. Н. Шведова (Космологія конца XIX вѣка). На первый планъ я ставлю именно эти двѣ

статьи вслѣдствіе того, что онѣ представляютъ, такъ сказать, результаты труда изъ первыхъ рукъ, а не простыя, хотя бы и очень талантливыя компиляціи.— А. С. Поповъ, одинъ изъ главнѣйшихъ иниціаторовъ дѣла телеграфированія безъ проводовъ, знаетъ его, разумѣется, до тонкости; поэтому каждая строка его статьи имѣетъ особое значеніе. —Въ очень интересной рѣчи Ѳ. Н. Шведова, произнесенной въ Общемъ Собраніи X Съѣзда естествоиспытателей и врачей въ Кіевѣ въ августѣ 1898 г., также излагаются нѣкоторыя собственныя изслѣдованія автора (между прочимъ остроумныя и оригинальныя гипотезы о происхожденіи града и кометъ). Написана эта рѣчь увлекательно, живо и касается она такихъ общеинтересныхъ и важныхъ вопросовъ, какъ „о происхожденіи, строеніи и дальнѣйшей судьбѣ вселенной", что навѣрное будетъ не только прочтена всѣми съ удовольствіемъ, но и оставитъ въ памяти читателя надолго глубокое впечатлѣніе.

Такимъ же блестящимъ изложеніемъ отличается статья О. Д. Хвольсона *„Объ одной формулировкѣ двухъ началъ термодинамики"*. Хотя формулировка эта (невозможность perpetuum mobile, ни перваго, ни второго рода) не представляетъ сама по себѣ ничего новаго, по крайней мѣрѣ для тѣхъ, кто слѣдитъ за текущей научной литературой, но изложенная въ томъ видѣ, какъ это сдѣлано авторомъ, она получаетъ новое и притомъ яркое освѣщеніе, все становится понятнымъ и очевиднымъ.

Чтобы показать до какой степени вообще разнообразны и интересны статьи „Ежегодника", достаточно перечислить только нѣкоторыя заглавія. Такъ напримѣръ: 1) *А. Васильевъ.* Пространство и движеніе. 4) *П. Зиловъ.* Жидкій воздухъ. 5) *С. Егоровъ.* Магнитное поле земли. 6) *В. Бернацкій.* Опыты Герца. 8) *В. Розенбергъ.* Опредѣленіе зрѣніемъ разстоянія. 12) *Ю. Шокальскій.* Очеркъ развитія физики океановъ. 13) *Б. Меншуткинъ.* О новыхъ газахъ атмосферы. 15) *М. Коноваловъ.* Объ аллотропіи. 20) *К. Покровскій.* Семейство кометъ.

Надо прибавить къ этому, что всѣ вообще статьи изложены просто, общедоступно, но вполнѣ научно.

Какъ водится, слѣдуетъ также высказать нѣкоторыя сожалѣнія и пожеланія, и выискать кое-какіе недосмотры или погрѣшности.— Изъ найденныхъ мною описокъ упомяну только о томъ, что въ статьѣ г. Афанасьева *„О беккерелевыхъ лучахъ"* приписывается открытіе этихъ лучей Э. Беккерелю (Edmond), между тѣмъ какъ честь открытія ихъ принадлежитъ его сыну (Henri Becquerel). — Интересная статья г. Игнатовскаго *„Объ электризаціи при соприкосновеніи"* вызываетъ сожалѣніе, что она слишкомъ коротка и что въ ней разсматриваются только опыты лорда Кельвина и Эрскина Мёррея (1898 г.) и не упоминается о другихъ, позднѣйшихъ изслѣдованіяхъ этого вопроса. Хотя и въ настоящемъ своемъ видѣ статья г. Игнатовскаго представляетъ все-таки нѣчто законченное, но будемъ надѣяться, что въ слѣдующей книжкѣ „Ежегодника" авторъ сообщитъ и дальнѣйшія подробности, какъ теоретическія, такъ и опытныя, касающіяся столь важнаго, основнаго вопроса ученія объ электричествѣ. - Подобный же упрекъ, но болѣе основательный, надо сдѣлать г. Блажко за одинъ пропускъ

въ его статьѣ *„О наблюденіяхъ полныхъ солнечныхъ затменій въ послѣдніе годы“*. Въ ней приводятся различные фотографическіе снимки солнечной короны, начиная съ 1860 года, и не упоминается даже о прекрасныхъ снимкахъ, полученныхъ Н. Н. Хамонтовымъ въ 1887 году въ Красноярскѣ и воспроизведенныхъ на страницахъ Журнала Физ. Хим. Общества. На половину этотъ упрекъ относится и къ г. Ганскому, спеціально изслѣдовавшему формы короны и не удѣлившему мѣста для снимка Н. Н. Хамонтова въ своей таблицѣ, приводимой г. Блажко въ его статьѣ. Меня поражало, что когда обсуждался вопросъ о новой экспедиціи для наблюденія солнечнаго затменія (1896 г.), то о старой экспедиціи какъ-то и не упоминалось, точно все, что сдѣлано было раньше, было забыто. Мы все еще продолжаемъ по старой привычкѣ пренебрегать всѣмъ своимъ.

Покончивъ съ упреками, остается еще разъ сказать, что „Ежегодникъ“ производитъ самое лучшее впечатлѣніе, и пожелать, чтобы и послѣдующія книжки его были столь же содержательны и такъ же интересны, какъ и первая.

Проф. Н. Гезехусъ.

26 ноября 1900. С.-Петербургъ: Технологическій Институтъ.

Сборникъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе, съ приложеніемъ задачъ, рѣшаемыхъ при помощи тригонометріи. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ **А. Воиновъ**, и. о. инспектора Корочанской гимназіи. Изд. 3-е исправленное и дополненное. Москва. 1900 г. Цѣна 75 коп.

Сборникъ содержитъ 1456 задачъ. Всѣ задачи раздѣлены на 10 отдѣловъ, именно: Отд. I. Прямая, уголъ, параллельныя прямыя, относительное положеніе окружностей (65 задачъ). Отд. II. Измѣреніе угловъ (33 зад.). Отд. III. Пропорціональныя прямыя, подобіе треугольниковъ и многоугольниковъ, пропорціональныя прямыя въ кругѣ (169 зад.). Отд. IV. Правильные многоугольники, вписанные и описанные многоугольники (49 зад.). Отд. V. Площади прямолинейныхъ фигуръ (223 зад.). Отд. VI. Окружность и площадь круга (68 зад.). Отд. VII. Призмы и пирамиды (153 зад.). Отд. VIII. Тѣла вращенія (169 зад.). Отд. IX Задачи на всѣ отдѣлы геометріи, рѣшаемыя при помощи тригонометріи (494 зад.). Отд. X. Понятіе о приложеніи алгебры къ геометріи (33 задачи).

Въ отношеніи содержанія этотъ „Сборникъ“ слѣдуетъ признать за одинъ изъ лучшихъ въ нашей учебной литературѣ. Кромѣ задачъ шаблонныхъ, безъ которыхъ не можетъ обойтись ни одинъ систематическій сборникъ задачъ, въ „Сборникѣ“ г. Воинова много задачъ, весьма интересныхъ по содержанію и представляющихъ превосходный матеріалъ для упражненій какъ въ геометрическихъ соображеніяхъ, такъ и въ вычисленіяхъ; особенно богаты такими задачами отдѣлы V, VII, VIII и IX. Обиліе, содержательность и разнообразіе задачъ этихъ отдѣловъ даютъ возможность пользоваться

„Сборникомъ" не только при прохожденіи курса геометріи, но и при повтореніи его. Этимъ существеннымъ достоинствомъ „Сборника" искупаются, по нашему мнѣнію, всѣ несущественные недостатки его, о которыхъ поговоримъ подробнѣе.

Судя по указанному выше подраздѣленію задачъ, можно думать, что составитель имѣлъ въ виду систематизировать ихъ въ порядкѣ прохожденія курса геометріи; но этому не вполнѣ соотвѣтствуетъ распредѣленіе задачъ по отдѣламъ. Въ задачахъ отд. I. углы задаются то въ частяхъ прямого угла (d), то въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; послѣднее встрѣчается даже чаще. Такъ какъ градусное измѣреніе угловъ обыкновенно основывается на пропорціональности между центральными углами и ихъ дугами, то ученики, прошедшіе объ углахъ вообще, о равенствѣ треугольниковъ и о параллельности прямыхъ, но не проходившіе статьи объ измѣреніи угловъ, не могутъ рѣшать такихъ задачъ вполнѣ осмысленно; поэтому, въ задачахъ отд. I. лучше было бы задавать углы только въ частяхъ d, задачи-же съ градуснымъ измѣреніемъ угловъ отнести къ отд. II. Непонятно также, почему задачи о вписанныхъ и описанныхъ треугольникахъ и многоугольникахъ вообще, рѣшающіяся безъ помощи теоріи правильныхъ многоугольниковъ, включены въ отд. IV. и помѣщены послѣ задачъ о правильныхъ многоугольникахъ.

Разбирая задачи каждаго отдѣла, мы опять замѣчаемъ въ распредѣленіи ихъ отсутствіе послѣдовательности и строгой системы: послѣ задачъ болѣе или менѣе сложныхъ нерѣдко встрѣчаются такія, которыя не требуютъ никакой подготовки и легко рѣшаются въ умѣ (напр., №№ 121, 162, 216, . . . отд. V).

Относительно редакціи задачъ можно сдѣлать упрекъ составителю въ томъ, что нѣкоторыя изъ нихъ выражены не совсѣмъ ясно, а въ нѣкоторыхъ встрѣчаются не точныя или не общеупотребительныя въ геометріи выраженія, напр.: „площадь діагональной плоскости" вм. „площадь діагональнаго сѣченія" (№№ 7, 24, 52, . . . отд. VII); „величина сѣченія" вм. „площадь сѣченія" (№ 114 отд. VII); „боковая поверхность конуса разворачивается" вм. „развертывается" (№№ 15, 43 отд. VIII). Выраженіе равнобочный цилиндръ" (№ 160 отд. VIII) требуетъ поясненія. Въ задачахъ о правильныхъ многогранникахъ составитель называетъ ихъ просто „тетраэдръ", „октаэдръ" и т. п., вмѣсто „правильный тетраэдръ", „правильный октаэдръ", какъ будто тетраэдры, октаэдры и т. п. не могутъ быть неправильными.

Въ зад. № 42 отд. IV. и №№ 167 и 170 отд. V. авторъ говоритъ о параллелограммахъ, описанныхъ около круга, желая, очевидно, предоставить ученикамъ догадываться, что рѣчь идетъ о ромбахъ. Намъ кажется это лишнимъ; ибо при прохожденіи статьи о вписанныхъ и описанныхъ четыреугольникахъ на урокахъ должно быть выяснено, что параллелограммъ вообще не можетъ быть ни вписаннымъ, ни описаннымъ. Зная же это, ученикъ, встрѣтивъ выраженіе „описанный параллелограммъ", приметъ его за ошибку.

При изложеніи понятія о приложеніи алгебры къ геометріи

авторъ говоритъ (отд. X. § 1): „алгебраическія выраженія могутъ быть построены, когда они имѣютъ видъ: 1) $a-b+c$ . . . . , 2) $\frac{ab}{c}$, 3) $\sqrt{ab}$, 4) $\sqrt{a^2+b^2}$, 5) $\sqrt{a^2-b^2}$, 6) $\frac{a}{b}$. Это не точно; слѣдовало сказать: „когда они приводятся къ виду"; ибо корни квадратнаго уравненія, формулы, содержащія тригонометрическія функціи, и др. могутъ быть построены, хотя не подходятъ ни къ одному изъ указанныхъ видовъ.

Въ концѣ книги на всѣ задачи (кромѣ отд. X.) даны отвѣты, а для нѣкоторыхъ (около 50) рѣшенія или указанія. Къ сожалѣнію, на нѣкоторыя задачи не дано отвѣтовъ въ алгебраическомъ видѣ, а указанъ только числовой результатъ (№№ 3—7 отд. IV.). Это неудобно, особенно въ задачахъ на правильные многоугольники; ибо, рѣшивъ невѣрно задачу въ общемъ видѣ и не имѣя возможности провѣрить полученный результатъ, ученикъ потратитъ напрасно не мало труда и времени на подстановку числовыхъ данныхъ. Замѣтимъ еще, что отвѣтъ „нѣтъ" на задачу: „Можетъ ли прямая разсѣчь прямоугольникъ на 2 подобныя трапеціи?" (№ 24, отд. Ш) не вѣренъ; прямая можетъ разсѣчь прямоугольникъ на двѣ равныя трапеціи, а равенство фигуръ—частный случай подобія. Въ отвѣтѣ на зад. № 1 отд. IV. не вѣрно вычислено $R\sqrt{2-\sqrt{2}}=1{,}55$ при $R=3$; должно быть 2,21 . . . Нѣкоторые отвѣты на задачи отд. IX. могли бы быть представлены въ болѣе простомъ видѣ, напримѣръ: № 28. $d:2\sin 90^0\left(1-\frac{1}{n}\right)=d:2\cos\frac{90^0}{n}$; № 152. $S\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha:\sin\alpha=S:2\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

$$№ 226.\ 8r^3\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha\cot 2\alpha\sqrt{\sin(120^0-\alpha)\sin(60^0-\alpha)}=$$

$$=4r^3\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha\sqrt{\cos(30^0-\alpha)\cos(30^0+\alpha)};$$

№ 307. $\operatorname{tg}^2\left(90-\frac{1}{4}x\right)=\operatorname{ctg}^2\frac{1}{4}x$; № 377. $\frac{1}{36}\sqrt{3h^3\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{1}{36}h\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{3h}$.

Опечатокъ встрѣчается немного; замѣчены слѣдующія: въ зад. № 162 отд. V. напечатано „смежныхъ стороно" вм. „противоположныхъ сторонъ", № 109 отд. V. „при меньшемъ основаніи" вм. „при большемъ основаніи", № 57 отд. Ш. „примѣръ" вм. „периметръ". Въ отвѣтъ на зад. № 70 отд. IX. $\sin x=\sqrt{r^2-a^2}\left(a-\sqrt{2a^2r^2}\right):ar$, очевидно, также вкралась опечатка.

Всѣ указанные недостатки „Сборника", конечно, не существенны и легко исправимы; мы отмѣтили ихъ только потому, что считаемъ книгу г. Воинова однимъ изъ лучшихъ руководствъ.

Допущенная во 2 изд. Уч. Ком. Мин. Нар. Просв. въ качествѣ учебнаго пособія книга г. Воинова вполнѣ заслуживаетъ вниманія преподавателей и широкаго распространенія среди учащихся.

Д. Ефремовъ (Иваново-Вознесенскъ).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Новое градусное измѣреніе въ Африкѣ. Подъ руководствомъ директора Капской обсерваторіи сэра *Daviol'a Gill'я* предпринято новое градусное измѣреніе въ Африкѣ; оно протянется отъ мыса Доброй Надежды до Александріи.

Стереоскопическіе снимки Сатурна. Директору Гейдельбергской астро-физической обсерваторіи, профессору *M. Wolf'у*, удалось недавно изготовить стереоскопическіе снимки Сатурна со спутниками; для этого онъ фотографировалъ Сатурнъ въ двухъ положеніяхъ. Если разсматривать такой снимокъ въ стереоскопъ, то представляется слѣдующая картина: Сатурнъ какъ бы виситъ въ пространствѣ и кольца его рельефно выдаются; также и луны кажутся отстоящими отъ планеты; на заднемъ же планѣ—небо съ неподвижными звѣздами.

† A. Böttcher. 20-го (7-го) ноября въ Берлинѣ скончался, на 76-омъ году жизни, физикъ *A. Böttcher.* (Physikalische Zeitschrift).

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Метеорологическая обсерваторія. 22-го (9-го) сентября въ *Аахенѣ* была торжественно открыта метеорологическая обсерваторія. (Das Wetter).

Отставка Скіапарелли. Вмѣсто вышедшаго 1-го ноября (19-го октября) въ отставку *Schiapparelli*, директоромъ астрономической обсерваторіи въ Римѣ назначенъ профессоръ *Celoria*, донынѣ ассистентъ послѣдней. (Physikalische Zeitschrift).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 642. Даны точка D и уголъ ABC. На сторонахъ этого угла найти точки x и y такъ, чтобы уголъ D и площадь треугольника Dxy имѣли данныя значенія.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 643. Даны три точки A, B, C. Черезъ точки A и B провести окружность такъ, чтобы касательныя, проведенныя къ ней изъ точки C, составляли между собой данный уголъ.

К. Пеніонжкевичъ (Лубны).

№ 644. Пусть m, n, p суть соотвѣтственно длины биссекторовъ угловъ A, B, C треугольника ABC. Доказать, что

$$a\left(mn\cos\frac{C}{2}+pm\cos\frac{B}{2}-np\cos\frac{A}{2}\right)=$$

$$=b\left(pn\cos\frac{A}{2}+mn\cos\frac{C}{2}-pm\cos\frac{B}{2}\right)=$$

$$=c\left(pm\cos\frac{B}{2}+np\cos\frac{A}{2}-mn\cos\frac{C}{2}\right)=mnp.$$

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 645. Рѣшить уравненіе:

$$x^3+\frac{x^3}{(x-1)^3}+\frac{3x^2}{x-1}+1=0.$$

А. Евлаховъ (Спб.).

№ 646. Рѣшить уравненіе:

$$x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0.$$

И. Вонсикъ (Воронежъ).

№ 647. Столбъ воды высотою въ $1{,}55^{м.}$ и столбъ другой жидкости высотой въ $3{,}17^{м.}$ уравновѣшиваются въ вѣтвяхъ трубки U; температура обѣихъ жидкостей 4^0. Какова плотность второй жидкости? Какова была бы высота этой жидкости, коэффиціентъ абсолютнаго расширенія которой равенъ 0,0002, при 20^0, если бы температура и высота столба воды остались прежними?

(Заимств.) *М. Г.*

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 544 (3 сер.). ***Рѣшить систему уравненій:***

$$u + v = a,$$

$$ux + vy = b,$$

$$ux^2 + vy^2 = c,$$

$$ux^3 + vy^3 = d.$$

Перемноживъ почленно первое и третье уравненія и вычтя изъ найденнаго уравненія второе, возвысивъ предварительно обѣ его части въ квадратъ, найдемъ:

$$uv(x - y)^2 = ac - b^2 \qquad (1).$$

Перемноживъ почленно сперва первое и четвертое уравненія, затѣмъ второе и третье и вычитая изъ перваго изъ полученныхъ въ результатѣ уравненій второе, имѣемъ:

$$uv(x + y)(x - y)^2 = ad - bc \qquad (2).$$

Если

$$ac - b^2 \neq 0, \qquad (3).$$

то и

$$u \neq 0,\ v \neq 0,\ x \neq y,$$

а потому изъ равенствъ (1) и (2) найдемъ:

$$x + y = \frac{ad - bc}{ac - b^2} \qquad (4).$$

Перемножая уравненіе (4) почленно со вторымъ изъ предложенныхъ, имѣемъ (см. данную систему):

$$ux^2 + vy^2 + xy(u + v) = c + axy = \frac{b(ad - bc)}{ac - b^2},$$

откуда, принимая во вниманіе неравенство (3) и предполагая, что

$$a \neq 0 \qquad (5),$$

найдемъ:

$$xy = \frac{bd - c^2}{ac - b^2} \qquad (6).$$

Изъ равенствъ (4) и (6) слѣдуетъ, что x и y суть корни

квадратнаго уравненія

$$t^2 - \frac{ad - cb}{ac - b^2} \cdot t + \frac{bd - c^2}{ac - b^2} = 0.$$

Пользуясь (см. (4), (6)) равенствомъ

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = \frac{(ad - bc)^2}{(ac - b^2)^2} - \frac{4(bd - c^2)}{ac - b^2},$$

находимъ uv изъ уравненія (2), что, въ связи съ первымъ изъ предложенныхъ уравненій, даетъ возможность опредѣлить u и v, какъ корни нѣкотораго квадратнаго уравненія.

Случаи, когда не выполняется одно изъ предположеній (3) или (5), лишь значительно облегчаютъ рѣшеніе системы.

А. Гвоздевъ (Курскъ); *К. Пеніонжкевичъ* (Лубны); *Я. Тепляковъ* (Кіевъ); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *А. Варенцовъ* (Шуя).

№ 546 (4 сер.). *Упругость оставшагося подъ колоколомъ пневматической машины воздуха равна 40 см., а давленіе наружнаго воздуха 75 см. Вычислить въ килограммахъ усиліе, необходимое для поднятія поршня машины, если поверхность поршня равна 80 кв. см. Плотность ртути 13,6.*

Давленіе наружнаго воздуха на поршень равно вѣсу столба ртути, площадь основанія котораго равна 80 кв. см., а высота — 75 см.

Вѣсъ такого столба ртути равенъ

$$75 . 80 . 13{,}6 \text{ грамм.}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что воздухъ, оставшійся внутри пневматической машины оказываетъ на поршень давленіе въ

$$40 . 80 . 13{,}6 \text{ грамм.}$$

въ направленіи, противоположномъ атмосферному давленію. Такимъ образомъ поршень испытываетъ окончательна давленіе сверху внизъ, равное

$$75.80.13{,}6 \text{ грамм.} - 40.80.13{,}6 \text{ грамм.} = \frac{(75-40).80.13{,}6}{1000} \text{ килограмм.}$$

Это давленіе и нужно преодолѣть, подымая поршень, если не принимать въ разсчетъ тренія поршня о стѣнки сосуда.

А. Варенцовъ (Шуя).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

F. Klein und **E. Riecke.** Ueber angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1900, bei Gelegenheit des Feriencurses. 252 стр. 8⁰.

Физико-Математическій Ежегодникъ, посвященный вопросамъ математики, физики, химіи и астрономіи въ элементарномъ изложеніи. Изданіе кружка авторовъ: „Сборникъ въ помощь самообразованію". Съ 128 рисун. въ текстѣ и 8 вкладными таблицами. Годъ первый *1900 г.* № 1. Москва. Цѣна 2 р. 95 к. 591 стр. 8⁰.

А. И. Гольденбергъ. Собраніе ариѳметическихъ упражненій для гимназій и реальныхъ училищъ. Курсъ приготов. и 1-го класса. Второе исправленное изданіе. С.-Петербургъ. 1899. 80 стр. 8⁰. Цѣна 25 к.

H. Pflaum. Ueber ein Vacuumelektroskop. Separat-Abdruck aus den Annalen der Physik. Leipzig. 1900. 5 стр. 8⁰.

A. Vassilieff. Les Idées D'Auguste Comte sur la Philosophie des mathematiques. Traduit du journal philosophique de Moscou par M-lle A. Gromeka. 1900. 12 стр.

А. Воиновъ и. о. инспектора Корочанской гимназіи. Сборникъ геометрическихъ задачъ на вычисленіе. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Москва. 1900. 148 стр. 8⁰. Цѣна 75 к.

И. Александровъ. Преподаватель Тамбовской гимназіи. Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе и сборникъ геометрическихъ задачъ съ полными и краткими рѣшеніями. Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. (Для старшихъ классовъ). Москва. 1900. 171 стр. Цѣна 1 р., съ перес. 1 р. 20 к.

M. Piltchikoff. Membre de l'Academie. Professeur á l'Université d'Odessa. Sur les varitons périodiques des éléments du magnétisme terrestre dans les régions anomales. 8 стр.

П. Цвѣтковъ. Методическій сборникъ ариѳметическихъ примѣровъ и задачъ, расположенныхъ по новой системѣ. (а) первый годъ обученія; (б) второй годъ; (в) третій годъ. Цѣна (а)—10 к., (б) и (в)—20 к., (а)—43 стр.; (б)—79 стр.; (в)—59 стр. 8⁰.

П. Цвѣтковъ. Рѣшеніе ариѳметическихъ задачъ, составляющихъ курсъ начальной ариѳметики и новая систематизація ихъ. Цѣна 35 к. 75 стр. 8⁰.

К. Тороповъ. Элементы алгебры. Курсъ среднихъ учебныхъ. заведеній. Пермь. 1900. Цѣна 1 р. 25 к. 272 стр. 8⁰.

К. Тороповъ. Краткій курсъ прямолинейной тригонометріи. Цѣна 75 к. 115 стр. 8⁰.

П. Свѣшниковъ. Элементарная теорія рядовъ. Приложеніе къ отчету о состояніи Уральскаго войскового реальнаго училища за $189^8/_9$ учебн. годъ. 51 стр. 8⁰.

Поль Аппель. Сборникъ задачъ по раціональной механикѣ. Статика. Динамика точки. Аналитическая механика точки. Динамика системъ. Переводъ А. Ненашева. Москва. 1900. Цѣна 75 к. 142 стр. 8⁰.

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 21-го декабря 1900 г.
Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.